Salaspils 1. vidusskola

Latvijas atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumu nestandarta atrisinājumi

Zinātniskās pētniecības darbs matemātikas nozarē

Darba autors: Artis Vijups
Darba vadītāja: Aiga Priedniece

Salaspils 2024

Anotācija

Darba "Latvijas atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumu nestandarta atrisinājumi" autors ir Artis Vijups, Salaspils 1. vidusskolas skolnieks un atzinības ieguvējs 2020. gada Starptautiskajā matemātikas olimpiādē.

Mērķis ir atrast nestandarta atrisinājumus dažādiem Latvijas atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumiem, izmantojot tādas stratēģijas un teorēmas, kuras ir iekļautas vispārējās vidējās izglītības mācību programmā matemātikā, kā arī sarežģītākas teorēmas, kas mācību programmā nav iekļautas.

Kopā tika atrasti 29 nestandarta atrisinājumi pēdējo četru Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumiem 9.-12. klasēm.

Atslēgas vārdi: matemātika, olimpiādes, teorēmas, nevienādības, atrisinājumi.

Annotation

The author of the work "Non-standard solutions to problems of the Latvian Open Mathematical Olympiad" is Artis Vijups, student at the Salaspils Secondary School No 1 and recipient of an honorary mention at the 2020 International Mathematical Olympiad.

The goal is to find non-standard solutions to various problems from the Latvian Open Mathematical Olympiad, using strategies and theorems that are part of the general secondary education mathematics curriculum, as well as more complicated theorems which are not part of the curriculum.

29 non-standard solutions for problems of the last four Latvian Open Mathematical Olympiads assigned to Forms 9 through 12 were found in total.

Keywords: mathematics, olympiads, theorems, inequalities, solutions.

Satura rādītājs

Ievads

Darba tēma izvēlēta, jo darba autors ir piedalījies Starptautiskajā matemātikas olimpiādē, un arī palīdz gatavot skolasbiedrus dalībai citās olimpiādēs un konkursos.

Tāpēc ieguvums, atrodot jaunus atrisinājumus uzdevumiem un apkopojot tajos izmantotās teorēmas un stratēģijas, ir gan darba autoram, gan arī citiem matemātikas olimpiāžu dalībniekiem un pasniedzējiem.

Darba mērķis: atrast nestandarta atrisinājumus pēdējo četru Latvijas atklātās matemātikas olimpiāžu uzdevumiem 9.-12. klasēm.

Darba uzdevumi:

- Noteikt un apkopot vērtīgas teorēmas uzdevumu risināšanai.
- Atrast nestandarta atrisinājumus Latvijas atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumiem.
- Apgūt pētnieciskā darba iemaņas; gūt praksi novērojumu un secinājumu izteikšanā un aizstāvēšanā.

Pētījuma jautājums: Kādas vēl stratēģijas un teorēmas var pielietot Latvijas atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumu risināšanai papildus oficiālajos atrisinājumos izmantotajām?

Darbā izmantotās metodes:

- literatūras analīze,
- patstāvīga uzdevumu risināšana.

Darba struktūra. Darbs sastāv no ievada, 3 nodaļām, 18 apakšnodaļām, secinājumiem, izmantotās literatūras avotiem un diviem pielikumiem. Darbā ir 6 attēli un 4 tabulas.

1. Izmantotās teorēmas

Šajā nodaļā uzskaitītas teorēmas, kas izmantotas atrastajos atrisinājumos, bet neparādās vispārējās vidējās izglītības mācību programmā matemātikā. [11]

1.1. Algebras teorēmas

1. **Polinoma dalīšana ar binomu.** "Ja $x = a$ ir polinoma P sakne, tad P dalās bez atlikuma ar binomu $x - a$ jeb polinoms P satur reizinātāju $x - a$." [6: p.37]

2. **Košī nevienādība.** "Jebkuriem reāliem skaitļiem $a_1, \ldots, a_n$ un $b_1, \ldots, b_n$ izpildās (1)." [5]

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{1}$$

3. **Faulhabera formula.** Jebkuriem naturāliem skaitļiem a un n izpildās (2), kur B_j ir j-tais Bernulli skaitlis. [10]

$$\sum_{k=1}^{n} k^a = \frac{1}{a+1}\sum_{j=0}^{a}(-1)^j C_{a+1}^{j} B_j n^{a+1-j} \tag{2}$$

   Pēc Faulhabera formulas izpildās vienādības (3), (4) un (5). [10]

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{5}$$

1.2. Ģeometrijas teorēmas

1. **Simsona taisne.** "Ja no trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas punkta P novelk perpendikulus pret taisnēm AB, BC, CA, tad perpendikulu pamati atrodas uz vienas taisnes. Šo taisni sauc par Simsona taisni." [6: p.39]

2. **Ptolemaja teorēma.** Ja $ABCD$ ir ievilkts četrstūris, tad un tikai tad izpildās (6). [14]

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD \tag{6}$$

3. **Ravi substitūcija.** "Pozitīvi skaitļi a, b, c ir trijstūra malas tad un tikai tad, ja eksistē tādi pozitīvi skaitļi x, y, z, kam vienlaicīgi izpildās vienādības $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x$." [6: p.39]

   Šī teorēma netika izmantota nevienā no Latvijas atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumu risinājumiem, taču tā tika izmantota atrisinājumā uzdevumam, kas iekļauts kā 2. pielikums.

1.3. Skaitļu teorijas teorēmas

1. **Divu kvadrātu teorēma.** "Naturālu skaitli n var izteikt kā divu kvadrātu summu tad un tikai tad, ja katram n pirmreizinātājam p^k, kuram izpildās $p \equiv 3\ (mod\, 4)$, kāpinātājs k ir pāra skaitlis." [7]

2. **Eilera teorēma.** "Ja a un n ir naturāli savstarpēji pirmskaitļi, tad izpildās (7)" [8], kur $\phi(n)$ ir Eilera funkcija, ko var aprēķināt pēc "(8), kur $p_1, p_2, ..., p_k$ ir visi atsevišķie pirmskaitļi, kas dala n." [9]

$$a^{\phi(n)} \equiv 1\ (mod\, n) \tag{7}$$

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \tag{8}$$

3. **Ležandra formula.** Valuāciju $\nu_p(n!)$, tas ir, augstāko pirmskaitļa p pakāpi, ar kuru dalās naturāla skaitļa n faktoriāls, var noteikt pēc (9). [12]

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \tag{9}$$

1.4. Nepieciešamās zināšanas

Dažas apskatītās teorēmas, piemēram, polinomu dalīšana ar binomu, Faulhabera formula un Eilera teorēma, ir iespējams izprast tad, ja ir zināšanas par attiecīgi tādām tēmām kā polinomu dalīšanu, Bernulli skaitļiem un kongruencēm, kas nav iekļautas vispārējās vidējās izglītības mācību programmā.

Taču citas teorēmas – Koši nevienādība, Simsona taisne un Ptolemaja teorēma – ir iespējams saprast, balstoties uz vispārējās vidējās izglītības mācību programmā apgūtajām zināšanām, tāpēc šo teorēmu iekļaušana mācību programmā, kā arī tālāko atrisinājumu, kuros šīs teorēmas tiek izmantotas, apskatīšana, gatavojoties dalībai olimpiādēs, varētu palīdzēt attīstīt skolēnu spējas dažādos algebras un ģeometrijas uzdevumos.

2. Nestandarta atrisinājumi ar stratēģijām un teorēmām no vispārējās vidējās izglītības mācību programmas matemātikā

Kopā pētījumā atrasti 17 nestandarta, tas ir, atšķirīgi no oficiālajiem, atrisinājumi pēdējo četru Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu (tālāk – AMO) uzdevumiem 9.-12. klasēm, kuros izmantotas stratēģijas un teorēmas no vispārējās vidējās izglītības mācību programmas.

8 no šiem atrisinājumiem tiek apskatīti šajā nodaļā, pārējie 9 tiek apskatīti 1. pielikuma pirmajā daļā.

2.1. Gadījumu pilnā pārlase

AMO 2017./2018. 9.2.: "Cik dažādos veidos basketbolā var gūt 18 punktus, izmantojot tikai 1 punkta un 3 punktu metienus? Veidi, kas atšķiras tikai ar 1 punkta un 3 punktu metienu secību, tiek uzskatīti par dažādiem. Piemēram, 4 punktus var iegūt trīs dažādos veidos:
$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 3 = 3 + 1$." [3]

Atrisinājums: 1. tabulā attēlota gadījumu pārlase.

Veidu skaits katrā gadījumā aprēķināts pēc formulas $\dfrac{(metienu\ kopskaits)!}{(3\ punktu\ metienu\ skaits)! \cdot (1\ punkta\ metienu\ skaits)!}$.

AMO 2017./2018. 9.2. gadījumu pārlases tabula

1. tabula

Cik ir 3 punktu metienu?	Cik ir 1 punkta metienu?	Cik metienu ir kopā?	Cik veidos to var gūt?	Cik ir 3 punktu metienu?	Cik ir 1 punkta metienu?	Cik metienu ir kopā?	Cik veidos to var gūt?
0	18	18	1	4	6	10	210
1	15	16	16	5	3	8	56
2	12	14	91	6	0	6	1
3	9	12	220			Veidu summa:	595 □

2.2. Nevienādību sistēmu ieviešana

AMO 2015./2016. 9.1.: "Atrisināt nevienādību $\dfrac{x-1}{x^2-4} \leqslant 0$." [1]

Atrisinājums: Nevienādību var pārrakstīt kā $\dfrac{x-1}{(x-2)(x+2)} \leqslant 0$.

Tad ir divi varianti:

1. $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ (x-2)(x+2) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in [1; +\infty) \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Longrightarrow x \in [1; 2).$

2. $\begin{cases} x-1 \leqslant 0 \\ (x-2)(x+2) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Longrightarrow x \in (-\infty; -2).$

Tātad nevienādības atrisinājums ir $x \in (-\infty; -2) \cup [1; 2)$. □

2.3. Skaitļa kvadrāta nenegativitāte

AMO 2015./2016. 12.3.: "Zināms, ka reāliem skaitļiem x, y un z izpildās nevienādība $2x^2 + xy + yz < 0$. Pierādīt, ka izpildās arī nevienādība $y^2 > 8xz$." [1]

Atrisinājums: Izsakot $8xz$ no dotās nevienādības, iegūst
$2x^2 + xy + xz < 0 \Longrightarrow 16x^2 + 8xy + 8xz < 0 \Longrightarrow 8xz < -16x^2 - 8xy.$

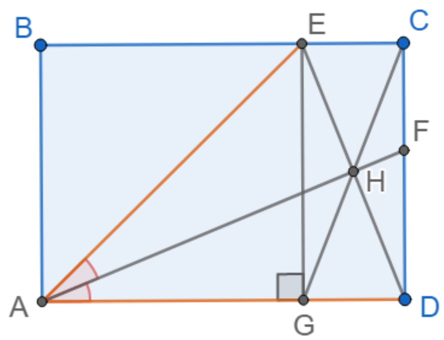
Līdz ar to, atliek pierādīt, ka $y^2 \geqslant -16x^2 - 8xy$.
$y^2 + 8xy + 16x^2 \geqslant 0$
$(y + 4x)^2 \geqslant 0$, kas izpildās, jo skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs. $\square$

2.4. Ievilkti četrstūri

AMO 2018./2019. 10.3.: "Dots taisnstūris $ABCD$, kur $AB < BC$. Uz malas BC izvēlēts tāds punkts E, ka $AE = AD$. Leņķa DAE bisektrise krusto malu CD punktā F. Trijstūrī ADE novilkts augstums EG. Pierādīt, ka $\measuredangle AGC = \measuredangle AFC$." [4]

Šim uzdevumam tika atrasti divi atrisinājumi.

Atrisinājums A: Konstrukcija 1. attēlā.



1. attēls. Ģeometriskā konstrukcija AMO 2018./2019. 10.3. atrisinājumam A. Izveidots ar GeoGebra. Autors Artis Vijups.

Novilkts ED, ED un AF krustpunkts apzīmēts ar H.

Tā kā AH ir vienādsānu trijstūra ($AE = AD$ pēc dotā) bisektrise, tas ir arī augstums un mediāna, līdz ar to H ir diagonāles ED viduspunkts.

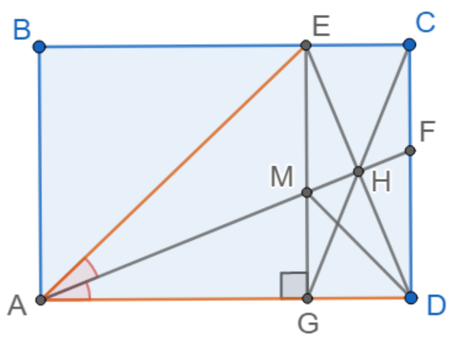
Tāpēc, novelkot otru taisnstūra $ECDG$ diagonāli GC, nogrieznim GC pieder punkts H.

$\measuredangle AHE = 90^\circ \implies \measuredangle AHE = \measuredangle AGE \implies$ Ap $AGHE$ var apvilkt riņķa līniju.
$\implies \measuredangle GAF = \measuredangle GED$.

Arī $CEGD$ var apvilkt riņķa līniju, jo $\measuredangle EGD + \measuredangle ECD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
$\implies \measuredangle GCF = \measuredangle GED$.

$\implies \measuredangle GAF = \measuredangle GCF \implies$ Ap $GACF$ var apvilkt riņķa līniju. $\implies \measuredangle AGC = \measuredangle AFC$. $\square$

Atrisinājums B: Konstrukcija 2. attēlā.



2. attēls. Ģeometriskā konstrukcija AMO 2018./2019. 10.3. atrisinājumam B. Izveidots ar GeoGebra. Autors Artis Vijups.

Novilkts ED, ED un AF krustpunkts apzīmēts ar H.

Tā kā AH ir vienādsānu trijstūra ($AE = AD$ pēc dotā) bisektrise, tas ir arī augstums un mediāna, līdz ar to H ir diagonāles ED viduspunkts.

Tāpēc, novelkot otru taisnstūra $ECDG$ diagonāli GC, nogrieznim GC pieder punkts H.

AH un EG krustpunkts apzīmēts ar M, novilkts MD.

Tad iespējams pierādīt šādus faktus:

- $\measuredangle MGH = \measuredangle MDH$, jo, tā kā $\measuredangle MGD + \measuredangle MHD = 90° + 90° = 180°$, ap $MGDH$ var apvilkt riņķa līniju;
- $\measuredangle MDH = \measuredangle MEH$, jo, tā kā nogrieznis MH ir gan augstums, gan mediāna, ΔMDE ir vienādsānu;
- $\measuredangle HEC = \measuredangle AFC$, jo, tā kā $\measuredangle ECF + \measuredangle EHF = 90° + 90° = 180°$, ap $ECFH$ var apvilkt riņķa līniju.

Apvienojot šos faktus, tiek iegūts $\measuredangle AGC = 90° + \measuredangle MGH = 90° + \measuredangle MDH =$
$= 90° + \measuredangle MEH = 180° - \measuredangle HEC = \measuredangle AFC$. $\square$

2.5. Trijstūra laukuma formulas

AMO 2015./2016. 11.1.: "No visiem vienādsānu trijstūriem ar sānu malas garumu $10\ cm$ atrast to, kuram ir vislielākais laukums!" [1]

Arī šim uzdevumam tika atrasti divi atrisinājumi.

Atrisinājums A: Prasītais tiks pierādīts, pielietojot trijstūra laukuma formulu $S = \dfrac{abc}{4R}$, kur R ir trijstūra apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Ieviešot $a = b = 10$ un $c = kR$, iegūts $S = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot kR}{4R} = 25k$.

Lielākā iespējamā k vērtība ir 2, jo $c \leqslant 2R$ kā riņķa līnijas horda.

Tad c ir riņķa līnijas diametrs un leņķis starp abām vienādsānu trijstūra sānu malām ir $90°$ pēc Talesa teorēmas.

Tātad no visiem vienādsānu trijstūriem vislielākais laukums ir taisnleņķa trijstūrim. $\square$

Atrisinājums B: Apsverot malu garumus $10, 10, 2a$, S var noteikt pēc Hērona formulas (pusperimetrs $p = 10 + a$):

$S = \sqrt{(10+a)(10+a-10)(10+a-10)(10+a-2a)} = \sqrt{(10+a)(a)(a)(10-a)} =$
$= \sqrt{(100-a^2)\,(a^2)} = \sqrt{100a^2 - a^4}$.

Jo lielāka ir $100a^2 - a^4$ vērtība, jo lielāka ir arī $\sqrt{100a^2 - a^4} = S$ vērtība.

Ieviešot $z = a^2$, iegūst $100a^2 - a^4 = 100z - z^2$.

Tad $z_{max} = \dfrac{-100}{2 \cdot (-1)} = 50$, līdz ar to $a^2 = 50$, $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ un $2a = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

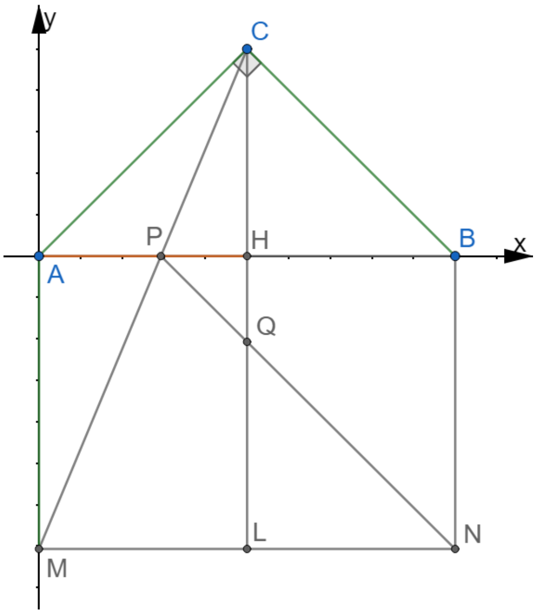
Tā kā $10\sqrt{2} < 10 + 10$, pēc trijstūra nevienādības šis malas garums ir derīgs.

Tātad no visiem vienādsānu trijstūriem ar sānu malas garumu $10\ cm$ tas, kuram ir vislielākais laukums, ir tas, kura trešās malas garums ir $10\sqrt{2}\ cm$. $\square$

2.6. Koordinātu ģeometrija

AMO 2018./2019. 9.3.: "Dots vienādsānu taisnleņķa trijstūris ABC ar taisno leņķi C. Uz tā hipotenūzas konstruēts taisnstūris $ABNM$ tā, ka punkti C un N atrodas dažādās pusēs no taisnes AB un $AC = AM$. Nogrieznis CM krusto AB punktā P. Punkts L ir malas MN viduspunkts. Nogrieznis CL krusto PN punktā Q. Pierādīt, ka **a)** trijstūris CBP ir vienādsānu; **b)** četrstūris $QNBC$ ir rombs!" [4]

Atrisinājums: Konstrukcija 3. attēlā (nākamajā lappusē).



3. attēls. Ģeometriskā konstrukcija AMO 2018./2019. 9.3. atrisinājumam. Izveidots ar GeoGebra. Autors Artis Vijups.

AB viduspunkts apzīmēts ar H. Tā kā gan C, gan H, gan L attālums līdz A sakrīt ar attālumu līdz B, $H \in CL$.

Pie tam, H ir ΔBCA mediāna un, tā kā ΔBCA ir vienādsānu, tas ir arī augstums, līdz ar to $\measuredangle AHC = 90°$.

Tad $\Delta AHC \sim \Delta ACB$ (ll), jo $\measuredangle AHC = \measuredangle ACB = 90°$ un $\measuredangle A$ ir kopīgs, līdz ar to $AH = HC$.

Ieviestas divas asis – x ass, kas sakrīt ar AB, un y ass, kas sakrīt ar AM. Attālums AH apzīmēts ar s.

Uzreiz iegūts $A(0; 0)$, $H(s; 0)$, $C(s; s)$, $B(2s; 0)$.

Izmantojot Pitagora teorēmu ΔAHC iegūst
$AC^2 = AH^2 + CH^2 = s^2 + s^2 = 2s^2 \Longrightarrow AC = \sqrt{2s^2} = s\sqrt{2}$.

Attiecīgi iegūst $M\left(0; -s\sqrt{2}\right)$, $L\left(s; -s\sqrt{2}\right)$, $N\left(2s; -s\sqrt{2}\right)$.

Izmantojot punktu C un M koordinātas, iegūst, ka taisnes CM funkcija ir
$y = \left(1 + \sqrt{2}\right)x - s\sqrt{2}$.

Šīs funkcijas krustpunkts ar x asi ir $P\left(s\left(2 - \sqrt{2}\right); 0\right)$.

Tad, izmantojot punktu P un N koordinātas, var noteikt, ka taisnes PN funkcija ir
$y = -x + s\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

Šīs funkcijas krustpunkts ar taisni $x = s$ ir $Q\left(s; s\left(1 - \sqrt{2}\right)\right)$.

Tad, izmantojot attāluma formulu $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, iegūst, ka
$BC = PB = NB = QN = QC = s\sqrt{2}$.

No tā, ka $BC = PB$, izriet, ka ΔCBP ir vienādsānu, bet no tā, ka
$BC = NB = QN = QC$, izriet, ka $BNQC$ ir rombs. $\square$

3. Nestandarta atrisinājumi ar teorēmām ārpus vispārējās vidējās izglītības mācību programmas matemātikā

Kopā pētījumā atrasti 12 nestandarta, tas ir, atšķirīgi no oficiālajiem, atrisinājumi pēdējo četru Latvijas atklāto matemātikas olimpiāžu uzdevumiem 9.-12. klasēm, kuros izmantotas teorēmas ārpus vispārējās vidējās izglītības mācību programmas.

8 no šiem atrisinājumiem tiek apskatīti šajā nodaļā, pārējie 4 tiek apskatīti 1. pielikuma otrajā daļā.

3.1. Polinoma dalīšana ar binomu

AMO 2017./2018. 11.5.: "Vienādojuma $x^3 - 44x^2 + 623x - 2860 = 0$ saknes ir trijstūra malu garumi. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!" [3]

Atrisinājums: Pirmkārt, ir iespējams novērot, ka $x_1 = 20$ ir viena no šī vienādojuma saknēm, jo $20^3 - 44 \cdot 20^2 + 623 \cdot 20 - 2860 = 8000 - 17600 + 12460 - 2860 = 0$.

Attiecīgi polinomu var izdalīt ar binomu $(x-20)$, un iegūt
$x^3 - 44x^2 + 623x - 2860 = (x-20)\left(x^2 - 24x + 143\right)$.

Pēc Vjeta teorēmas, $x^2 - 24 + 143$ sakņu x_2 un x_3 summa ir 24, bet reizinājums ir 143. Attiecīgi $x_2 = 11$ un $x_3 = 13$.

Tagad trijstūra laukumu var noteikt pēc Hērona formulas. Trijstūra pusperimetrs ir $\dfrac{20+11+13}{2} = 22$ un
$S = \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)} = \sqrt{22 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 9} = \sqrt{22 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 3} = 22 \cdot 3 = 66.$ $\square$

3.2. Koši nevienādība

AMO 2016./2017. 10.2.: "Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a un b izpildās $\left(\dfrac{3a}{b}+1\right)\left(\dfrac{3b}{a}+1\right) \geqslant 16$." [2]

Atrisinājums: Pēc Koši nevienādības

$$\left(\left(\sqrt{\frac{3a}{b}}\right)^2 + 1^2\right)\left(\left(\sqrt{\frac{3b}{a}}\right)^2 + 1^2\right) \geqslant \left(\sqrt{\frac{3a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{3b}{a}} + 1 \cdot 1\right)^2.$$

Tad $\left(\dfrac{3a}{b}+1\right)\left(\dfrac{3b}{a}+1\right) \geqslant \left(\sqrt{\dfrac{3^2ab}{ab}}+1\right)^2 = (3+1)^2 = 16.$ $\square$

3.3. Faulhabera formula

AMO 2018./2019. 10.1.: "Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām ir spēkā vienādība $6 + 24 + 60 + ... + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$." [4]

Atrisinājums: $6 + 24 + 60 + ... + n(n+1)(n+2) =$

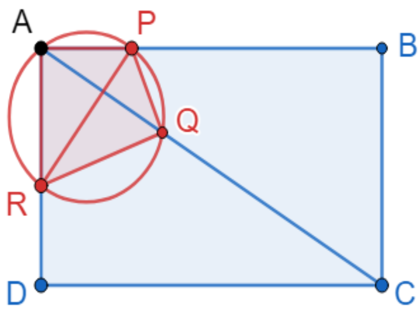
$$= \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^3 + 3i^2 + 2i\right) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i =$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 4n(n+1)}{4} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n(n+1)+2(2n+1)+4)}{4} = \frac{n(n+1)\left(n^2+n+4n+2+4\right)}{4} =$$
$$= \frac{n(n+1)\left(n^2+5n+6\right)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \quad \square$$

3.4. Ptolemaja teorēma

AMO 2016./2017. 10.3.: "Taisnstūrī $ABCD$ caur virsotni A novilkta riņķa līnija, kas nogriežņus AB, AC un AD krusto attiecīgi punktos P, Q un R. Pierādīt, ka $AB \cdot AP + AD \cdot AR = AC \cdot AQ$!" [2]

Atrisinājums: Konstrukcija 4. attēlā.



4. attēls. Ģeometriskā konstrukcija AMO 2016./2017. 10.3. atrisinājumam. Izveidots ar GeoGebra. Autors Artis Vijups.

Tā kā $APQR$ ir apvilkts četrstūris, $\measuredangle RQP = 180° - \measuredangle RAP = 180° - 90° = 90°$.

Tad $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (ll), jo $\measuredangle ABC = \measuredangle RQP = 90°$ un $\measuredangle BAC = \measuredangle QRP$, jo abi leņķi balstās uz hordas PQ.

$$\Longrightarrow \frac{AB}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

Un $\Delta CDA \sim \Delta RQP$ (ll), jo $\measuredangle CDA = \measuredangle RQP = 90°$ un $\measuredangle CAD = \measuredangle RPQ$, jo abi leņķi balstās uz hordas QR.

$$\Longrightarrow \frac{AD}{PQ} = \frac{AC}{PR} \Longrightarrow \frac{AB}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PQ} = k \Longrightarrow QR = \frac{AB}{k},\ PR = \frac{AC}{k} \text{ un } PQ = \frac{AD}{k}.$$

Tālāk, tā kā $APQR$ ir apvilkts četrstūris, pēc Ptolemaja teorēmas izpildās $QR \cdot AP + PQ \cdot AR = PR \cdot AQ$.

$\Longrightarrow \frac{AB}{k} \cdot AP + \frac{AD}{k} \cdot AR = \frac{AC}{k} \cdot AQ$, kas, pareizinot abas puses ar k, kļūst par $AB \cdot AP + AD \cdot AR = AC \cdot AQ$. $\square$

3.5. Simsona taisne

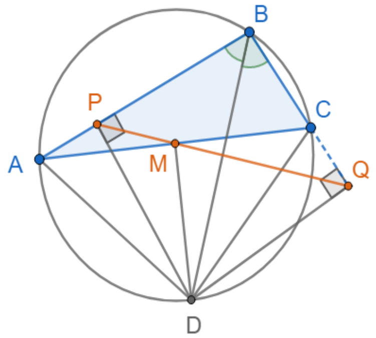
AMO 2015./2016. 12.4.: "Trijstūrī ABC leņķa $\measuredangle ABC$ bisektrise krusto tam apvilkto riņķa līniju punktā D. Nogriežņi DP un DQ ir attiecīgi trijstūru ABD un BCD augstumi. Pierādīt, ka nogrieznis PQ krusto malu AC tās viduspunktā!" [1]

Atrisinājums: Konstrukcija 5. attēlā.

Punktam D tuvākie punkti uz malām AB, BC un AC vai to pagarinājumiem atrodas uz vienas taisnes – Simsona taisnes.

Līdz ar to, apzīmējot PQ un AC krustpunktu ar M, iegūst, ka $DM \perp AC$.

Tad $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC \Longrightarrow \cup AD = \cup DC \Longrightarrow AD = DC \Longrightarrow \Delta ADC$ – vienādsānu.



5. attēls. Ģeometriskā konstrukcija AMO 2015./2016. 12.4. atrisinājumam. Izveidots ar GeoGebra. Autors Artis Vijups.

Šī trijstūra augstums DM sakrīt ar mediānu, līdz ar to PQ un AC krustpunkts M ir malas AC viduspunkts. $\square$

3.6. Divu kvadrātu teorēma

AMO 2015./2016. 10.3.: "Aritmētiskās progresijas četri pēc kārtas ņemti locekļi ir veseli skaitļi A, B, C un D. Pierādīt, ka $A^2 + 2B^2 + 3C^2 + 4D^2$ var izteikt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu!" [1]

Atrisinājums: Izmantojot aritmētiskās progresijas definīciju, $B = A + d$, $C = A + 2d$, $D = A + 3d$, kur d ir aritmētiskās progresijas diference. Tad

$$A^2 + 2B^2 + 3C^2 + 4D^2 = A^2 + 2(A + d)^2 + 3(A + 2d)^2 + 4(A + 3d)^2 =$$
$$= A^2 + 2A^2 + 4Ad + 2d^2 + 3A^2 + 12Ad + 12d^2 + 4A^2 + 24Ad + 36d^2 =$$
$$= 10A^2 + 40Ad + 50d^2 = 10A^2 + 40Ad + 40d^2 + 10d^2 =$$
$$= 10\left(A^2 + 4Ad + 4d^2 + d^2\right) = 10\left((A + 2d)^2 + d^2\right).$$

Pēc divu kvadrātu teorēmas, starp skaitļa $(A + 2d)^2 + d^2$ pirmreizinātājiem nav tāds p^k, kur $p \equiv 3\ (mod\ 4)$ un k ir nepāra.

Tā kā skaitļa 10 pirmreizinātāji 2 un 5, dalot ar 4, nedod atlikumu 3, arī starp skaitļa $10\left((A + 2d)^2 + d^2\right)$ pirmreizinātājiem nav tāds p^k, kur $p \equiv 3\ (mod\ 4)$ un k ir nepāra, tādēļ pēc divu kvadrātu teorēmas arī $10\left((A + 2d)^2 + d^2\right) = A^2 + 2B^2 + 3C^2 + 4D^2$ var izteikt kā divu kvadrātu summu. $\square$

3.7. Eilera teorēma

AMO 2017./2018. 10.4.: "Pierādīt, ja x – naturāls skaitlis, tad $x^8 - x^2$ dalās ar 252." [3]

Atrisinājums: Tā kā $x^8 - x^2 = x^2\left(x^6 - 1\right)$, lai pierādītu, ka $x^8 - x^2 \equiv 0\ (mod\ m)$, atliek pierādīt, ka $x^2 \equiv 0\ (mod\ m)$ vai $x^6 \equiv 1\ (mod\ m)$.

Tā kā $252 = MKD(4, 7, 9)$, pierādot dalāmību ar 4, 7 un 9, būsim pierādījuši dalāmību ar 252.

- $x^8 - x^2$ dalās ar 4, jo:
  - ja $x \equiv 0\ (mod\ 4)$, tad $x^2 \equiv 0\ (mod\ 4)$;
  - ja $x \equiv 1\ (mod\ 4)$, tad $x^6 \equiv 1\ (mod\ 4)$;
  - ja $x \equiv 2\ (mod\ 4)$, tad $x^2 \equiv 4 \equiv 0\ (mod\ 4)$;
  - ja $x \equiv 3\ (mod\ 4)$, tad $x^6 \equiv 3^6 \equiv (-1)^6 \equiv 1\ (mod\ 4)$.
- $x^8 - x^2$ dalās ar 7, jo:

- ja $LKD(x,7)=1$, tad, tā kā $\phi(7)=7\left(1-\dfrac{1}{7}\right)=6$, kur $\phi(x)$ ir Eilera funkcija, pēc Eilera teorēmas $x^{\phi(7)}=x^6\equiv 1\ (mod\ 7)$.
- ja $LKD(x,7)\neq 1$, tad $x\equiv 0\ (mod\ 7)\implies x^2\equiv 0\ (mod\ 7)$.

• x^8-x^2 dalās ar 9, jo:
- ja $LKD(x,9)=1$, tad, tā kā $\phi(9)=9\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=6$, kur $\phi(x)$ ir Eilera funkcija, pēc Eilera teorēmas $x^{\phi(9)}=x^6\equiv 1\ (mod\ 9)$.
- ja $LKD(x,9)\neq 1$, tad $x\equiv 0\ (mod\ 3)\implies x^2\equiv 0\ (mod\ 9)$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka x^8-x^2 dalās ar 252. $\square$

3.8. Ležandra formula

AMO 2018./2019. 12.4.: "Sporta nometnē ir 100 skolēni. Ar N apzīmējam, cik veidos šos 100 skolēnus var sadalīt 50 pāros (pāru secība un arī skolēnu secība pārī nav svarīga). Ar kādu lielāko trijnieka pakāpi dalās N?" [4]

Atrisinājums: Ir 50 rindas sanumurētas no 1 līdz 50, un katrā rindā jānovieto divi skolēni. Veidu skaits, kā to var izdarīt, ir $\sum\limits_{i=0}^{49} C^2_{100-2i}=\dfrac{100!}{2^{50}}$. Taču, tā kā tas nav svarīgi, kurā rindā pēc kārtas ir kurš pāris, ir $\dfrac{100!}{2^{50}\cdot 50!}$ veidi, kā skolēni var sadalīties pāros.

Apzīmējot augstāko skaitļa 3 pakāpi, ar kuru dalās x, kā valuāciju $\nu_3(x)$ un izmantojot Ležandra formulu:

$$\nu_3(100!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{100}{3^i}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{9}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{27}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{81}\right\rfloor=33+11+3+1=48$$

$$\nu_3(50!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{50}{3^i}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{50}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{50}{9}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{50}{27}\right\rfloor=16+5+1=22$$

$$\implies \nu_3\left(\frac{100!}{2^{50}\cdot 50!}\right)=\nu_3(100!)-\nu_3\left(2^{50}\right)-\nu_3(50!)=48-0-22=26 \quad \square$$

Secinājumi

1. Latvijas atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumiem pastāv atrisinājumi, kas nav iekļauti olimpiādes oficiālajos atrisinājumos, un pētījumā tika atrasti 29 šādi atrisinājumi.

2. Latvijas atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumus iespējams risināt, izmantojot arī dažādas teorēmas, kas neparādās vispārējās vidējās izglītības mācību programmā.

3. Iegūtie atrisinājumi ir vērtīgi dalībnieku sagatavošanai Latvijas atklātajai matemātikas olimpiādei un citām olimpiādēm.

4. Košī nevienādību, Simsona taisni un Ptolemaja teorēmu varētu iekļaut vispārējās vidējās izglītības mācību programmā, jo šīs teorēmas ir saprotamas bez papildu zināšanām, un tās ir noderīgas vairāku uzdevumu atrisinājumos.

Izmantotā literatūra

1. A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. *Latvijas 43. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi un atrisinājumi.* http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/04/AMO_uzd_atris_1516.pdf [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

2. A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. *Latvijas 44. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi un atrisinājumi.* http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2017/05/AMO44_uzd_atrisin.pdf [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

3. A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. *Latvijas 45. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi un atrisinājumi.* http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2018/06/AMO_uzdevumi_atrisinajumi.pdf [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

4. A. Liepas Neklātienes matemātikas skola. *Latvijas 46. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi un atrisinājumi.* http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2019/04/AMO_46_uzd_atr.pdf [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

5. Art of Problem Solving. *Cauchy-Schwarz Inequality.* Pieejams: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cauchy-Schwarz_Inequality [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

6. Avotiņa M., Kokainis M. *Matemātikas sacensības 9.–12. klasēm 2016./2017. mācību gadā.* Rīga: Latvijas Universitāte; 2017.

7. Baskars Dž. *Sum of two squares.* Pieejams: https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Bhaskar.pdf [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

8. Brilliant. *Euler's Theorem.* Pieejams: https://brilliant.org/wiki/eulers-theorem/ [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

9. Brilliant. *Euler's Totient Function.* Pieejams: https://brilliant.org/wiki/eulers-totient-function/ [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

10. Brilliant. *Sum of n, n^2, or n^3.* Pieejams: https://brilliant.org/wiki/sum-of-n-n2-or-n3/#faulhabers-formula [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

11. Likumi. *Plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti matemātikas mācību jomā.* Pieejams: https://likumi.lv/ta/id/309597#piel6 [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

12. Mihets D. *Legendre's and Kummer's Theorems Again.* https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/015/12/1111-1121 [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

13. Mildorfs T.J. *Olympiad Inequalities.* https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/olympiades/Cours/Inegalites/Inequalities.pdf [Skatīts 2021. gada 31. janvārī].

14. Vilsons Dž. *Ptolemy's Theorem.* Pieejams: http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Ptolemy/Ptolemy.html [Skatīts 2021. gada 27. janvārī].

Pielikumi

1. pielikums

Pirmā daļa

AMO 2015./2016. 9.2.: "Vai var atrast tādus veselus skaitļus x, y un z, ka $x^3 - 2016xyz = 10$?" [1]

Alternatīvs atrisinājums: Ja kāds no mainīgajiem ir 0, tad $10 = x^3 - 2016xyz = x^3$. Tā kā 10 nav vesela skaitļa kubs, šāds atrisinājums nepastāv.

Iznesot $x^3 - 2016xyz = 10 \Longrightarrow x\left(x^2 - 2016yz\right) = 10$, var secināt, ka x jābūt skaitļa 10 veselam dalītājam, tātad $x \in [-10; 10] \Longrightarrow x^3 \in [-1000; 1000] \Longrightarrow x^3 - 10 \in [-1010; 990]$.

Tikmēr, tā kā $x, y, z \neq 0$ ir veseli skaitļi, $2016xyz \in (-\infty; -2016] \cup [2016; +\infty)$.

Izriet, ka $x^3 - 10 \neq 2016xyz$, jo kreisās un labās puses vērtību intervālu šķēlums ir $\varnothing$.

Tad $x^3 - 2016xyz \neq 10$, līdz ar to dotajam vienādojumam nav atrisinājumu veselos skaitļos. $\square$

AMO 2016./2017. 9.2.: "Pierādīt, ka $x^6 + y^6 + \dfrac{2}{x^3y^3} - 4 \geqslant 0$, ja $x > 0$, $y > 0$." [2]

Atrisinājums: Sākotnēji nepieciešams pierādīt divas nevienādības.

$x^6 + y^6 \geqslant 2x^3y^3$ (I)

$x^6 - 2x^3y^3 + y^6 \geqslant 0$

$\left(x^3 - y^3\right)^2 \geqslant 0$, kas izpildās, jo skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

$2x^3y^3 \geqslant 4 - \dfrac{2}{x^3y^3}$ (II) $\;||\cdot x^3y^3 > 0$

$2x^6y^6 \geqslant 4x^3y^3 - 2$

$2x^6y^6 - 4x^3y^3 + 2 \geqslant 0$

$\left(x^3y^3\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0$, kas izpildās, jo skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

Apvienojot (I) un $(II) \Longrightarrow x^6 + y^6 \geqslant 2x^3y^3 \geqslant 4 - \dfrac{2}{x^3y^3} \Longrightarrow x^6 + y^6 + \dfrac{2}{x^3y^3} - 4 \geqslant 0$ $\square$

AMO 2017./2018. 9.1.: "Dots vienādojums $(a-3)x^2 + 5x - 2 = 0$. **a)** Kādām a vērtībām vienādojumam ir tieši viena sakne? **b)** Kādām a vērtībām vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes?" [3]

Atrisinājums: a) Ja $a = 3$, tad iegūst lineāru funkciju $5x - 2 = 0$, kuram ir viena sakne $x = 0.4$.

Citādi dotais vienādojums ir kvadrātvienādojums, un tam ir viena sakne tad un tikai tad, ja $y_0 = 0$.

$x_0 = \dfrac{-5}{2(a-3)} \Longrightarrow y_0 = \dfrac{-25}{4(a-3)} - 2 \Longrightarrow 0 = \dfrac{-25}{4(a-3)} - 2 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{8}$.

Tātad dotajam vienādojumam ir viena sakne, ja $a = 3$ vai $a = -\dfrac{1}{8}$.

b) Ja $a > 3$, t.i., $a - 3 > 0$, tad parabolas vērsums ir uz augšu, tādēļ divas saknes ir tad un tikai tad, ja $y_0 < 0$.

$y_0 = \dfrac{-25}{4(a-3)} - 2 < 0 \Longrightarrow \dfrac{-25}{4(a-3)} < 2 \Longrightarrow a > -\dfrac{1}{8}$.

Ja $a < 3$, t.i., $a - 3 < 0$, tad parabolas vērsums ir uz leju, tādēļ divas saknes ir tad un tikai tad, ja $y_0 > 0$.

$y_0 = \dfrac{-25}{4(a-3)} - 2 > 0 \Longrightarrow \dfrac{-25}{4(a-3)} > 2 \Longrightarrow a > -\dfrac{1}{8}$.

Tātad dotajam vienādojumam ir divas dažādas saknes, ja $a \in \left(-\dfrac{1}{8}; 3\right) \cup (3; +\infty)$. $\square$

AMO 2017./2018. 10.2.: "Uz koordinātu ass koordinātu sākumpunktā sēž blusa. Ar vienu lēcienu tā var aizlēkt vai nu 1, vai 2, vai 5 vienības pa labi. Cik dažādos veidos blusa var nokļūt punktā, kura koordināta ir 15? (Veidus uzskata par atšķirīgiem, ja atšķiras izdarīto lēcienu secība.)" [3]

Atrisinājums: 2. tabulā veikta gadījumu pārlase.

Veidu skaits katrā gadījumā aprēķināts pēc formulas $\frac{(l.\ kopskaits)!}{(5\ vien.\ l.\ skaits)! \cdot (2\ vien.\ l.\ skaits)! \cdot (1\ vien.\ l.\ skaits)!}$.

AMO 2017./2018. 10.2. gadījumu pārlases tabula

2. tabula

Cik ir 5 vien. lēcienu?	Cik ir 2 vien. lēcienu?	Cik ir 1 vien. lēcienu?	Cik kopā ir lēcienu?	Cik veidi pastāv?	Cik ir 5 vien. lēcienu?	Cik ir 2 vien. lēcienu?	Cik ir 1 vien. lēcienu?	Cik kopā ir lēcienu?	Cik veidi pastāv?
0	0	15	15	1	1	2	6	9	252
0	1	13	14	14	1	3	4	8	280
0	2	11	13	78	1	4	2	7	105
0	3	9	12	220	1	5	0	6	6
0	4	7	11	330	2	0	5	7	21
0	5	5	10	252	2	1	3	6	60
0	6	3	9	84	2	2	1	5	30
0	7	1	8	8	3	0	0	3	1
1	0	10	11	11					
1	1	8	10	90	Veidu summa:			1843	☐

AMO 2017./2018. 11.2.: "Cik dažādus taisnstūrus ar izmēriem $1 \cdot 12$ var izveidot no 6. attēlā dotajām figūriņām? Taisnstūri, kas atšķiras ar figūriņu secību vai krāsu, ir dažādi." [3]

6. attēls. AMO 2017./2018. 11.2. dotās figūriņas. Autori A. Liepas Neklātienes matemātikas skola.

Atrisinājums: 3. tabulā veikta gadījumu pārlase.

Veidu skaits katrā gadījumā aprēķināts pēc formulas $\frac{(fig.\ kopskaits)!}{(3\ r.\ fig.\ skaits)! \cdot (1\ r.\ fig.\ skaits)!} \cdot 2^{(3\ r.\ fig.\ skaits)}$.

AMO 2017./2018. 11.2. gadījumu pārlases tabula

3. tabula

Cik ir 3 rūtiņu figūriņu?	Cik ir 1 rūtiņas figūriņu?	Cik kopā ir figūriņu?	Cik veidi pastāv?	Cik ir 3 rūtiņu figūriņu?	Cik ir 1 rūtiņas figūriņu?	Cik kopā ir figūriņu?	Cik veidi pastāv?
0	12	12	1	3	3	6	160
1	9	10	20	4	0	4	16
2	6	8	112	Veidu summa:			309 ☐

AMO 2017./2018. 12.2.: "Cik veidos rindā var iestādīt septiņus kokus – liepas, ozolus, priedes un egles – tā, lai nekur blakus neatrastos divi skuju koki? (Nav obligāti jāizmanto visas koku sugas. Veidi, kas atšķiras ar koku secību rindā, ir dažādi.)" [3]

Atrisinājums: 4. tabulā veikta gadījumu pārlase (S – skuju koks, L – lapu koks).

Iegūtais veidu skaits reizināts ar 2^7, jo gan S, gan L vietā var būt 2 koki.

AMO 2017./2018. 12.2. gadījumu pārlases tabula

4. tabula

S	Veidi	Skaits	Summa	$\cdot\, 2^7$
0	$LLLLLLL$	1		
1	$SLLLLLL$, $LSLLLLL$, $LLSLLLL$, $LLLSLLL$, $LLLLSLL$, $LLLLLSL$, $LLLLLLS$	7	34	4352 □
2	$SLSLLLL$, $SLLSLLL$, $SLLLSLL$, $SLLLLSL$, $SLLLLLS$, $LSLSLLL$, $LSLLSLL$, $LLLLSLS$, $LSLLLSL$, $LSLLLLS$, $LLSLSLL$, $LLSLLSL$, $LLSLLLS$, $LLLSLSL$, $LLLSLLS$	15		
3	$SLSLSLL$, $SLSLLSL$, $SLSLLLS$, $SLLSLSL$, $SLLSLLS$, $SLLLSLS$, $LSLSLSL$, $LSLSLLS$, $LSLLSLS$, $LLSLSLS$	10		
4	$SLSLSLS$	1		

AMO 2018./2019. 9.4.: "Ja naturāla sešciparu skaitļa visus nepāra ciparus aizvietotu ar 7, iegūtu skaitli, kas ir par 5998 lielāks nekā sākotnējais skaitlis. Savukārt, ja sākotnējā skaitlī ar 7 aizvietotu visus pāra ciparus, tad iegūtais skaitlis būtu par 500290 lielāks nekā sākotnējais. Atrast doto sešciparu skaitli!" [4]

Atrisinājums: Meklējamais skaitlis apzīmēts ar $\overline{abcdef}$.

Izsakot 5998 kā $+6000 - 2$, izriet, ka $c = 7 - 6 = 1$ un $f = 7 + 2 = 9$.

Izsakot 500290 kā $+500000 + 300 - 10$, izriet, ka $a = 7 - 5 = 2$, $d = 7 - 3 = 4$ un $e = 7 + 1 = 8$.

Vienīgais burts, kuram nav piešķirta vērtība, ir b, tāpēc $b = 7$.

Attiecīgi meklētais skaitlis ir 271489. Pēc pārbaudes šis skaitlis der. □

AMO 2018./2019. 9.5.: "Vai eksistē tāds kvadrātvienādojums ar veseliem koeficientiem, kuram ir sakne
$\left(\sqrt{2020} - 2\sqrt{2019} + \sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020} + \sqrt{2019}\right)\left(\sqrt{2019} + \sqrt{2018}\right)\left(\sqrt{2020} + \sqrt{2018}\right)$?" [4]

Atrisinājums: Apzīmējot $2019 = n$, doto izteiksmi var pārveidot par

$$\left(-n + 1 - \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{(n-1)(n+1)} + \sqrt{n(n-1)}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)} + \sqrt{(n-1)(n+1)} + n - 1\right);$$

tad, definējot $\sqrt{n(n+1)} + n - 1 = a$ un $\sqrt{(n-1)(n+1)} + \sqrt{n(n-1)} = b$, izteiksme kļūst par $(-a+b)(a+b) = -a^2 - ab + ab + b^2 = b^2 - a^2$.

Aizstājot a un b ar to sākotnējām definīcijām un atverot iekavas, izteiksme noīsinās līdz -2.

Attiecīgi der jebkurš kvadrātvienādojums ar veseliem koeficientiem, kuram ir sakne -2, piemēram, $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$, kuram tā ir vienīgā sakne. □

AMO 2018./2019. 11.1.: "Atrisināt nevienādību $\frac{(x-20)^{19}(x+4)}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)(9-x^2)} \geqslant 0$." [4]

Atrisinājums: Tā kā $(x-20)^{19}$ un $(x-20)$ ir vienāda zīme, skaitītāju var vienkāršot kā $(x-20)(x+4)$, un, tā kā reizinātājs $\sqrt{x^2+4}$ ir pozitīvs, tāpēc neietekmē saucēja zīmi, saucēju var vienkāršot kā $9 - x^2 = -(x-3)(x+3)$.

Līdz ar to atliek noteikt kādiem x izpildās $\dfrac{(x-20)(x+4)}{-(x-3)(x+3)} \geqslant 0$.

Tad ir divi varianti:

1. $\begin{cases}(x-20)(x+4) \geqslant 0\\ -(x-3)(x+3) > 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x \in (-\infty; -4] \cup [20; +\infty)\\ x \in (-3; 3)\end{cases} \Longrightarrow x \in \varnothing$

2. $\begin{cases}(x-20)(x+4) \leqslant 0\\ -(x-3)(x+3) < 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x \in [-4; 20]\\ x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)\end{cases} \Longrightarrow x \in [-4; -3) \cup (3; 20]$

Tātad nevienādības atrisinājums ir $x \in [-4; -3) \cup (3; 20]$. $\square$

Otrā daļa

AMO 2016./2017. 9.5.: "Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^3 + (x+1)^3 = (x+3)^3 + 1$." [2]

Atrisinājums: Atverot iekavas, $x^3+(x+1)^3 = (x+3)^3+1$ kļūst par $x^3-6x^2-24x-27 = 0$.

Tad $x = 9$ ir šī vienādojuma sakne, jo $9^3 - 6 \cdot 9^2 - 24 \cdot 9 - 27 = 729 - 486 - 216 - 27 = 0$.

Attiecīgi polinomu var izdalīt ar binomu $(x-9)$ un iegūt $x^3 - 6x^2 - 24x - 27 = (x-9)\left(x^2 + 3x + 3\right)$.

Novērojot, ka $x^2 + 3x + 3$ diskriminants $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0$, izriet, ka sākotnējā vienādojuma vienīgais atrisinājums ir $x = 9 \in N$. $\square$

AMO 2016./2017. 11.2.: "Doti tādi četri pozitīvi skaitļi a_1, a_2, a_3 un a_4, ka $a_1a_3 = a_2a_4 = 2017$. Kāda ir mazākā iespējamā izteiksmes $(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)$ vērtība?" [2]

Atrisinājums: Pēc Koši nevienādības $\left((\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{a_2})^2\right)\left((\sqrt{a_3})^2 + (\sqrt{a_4})^2\right) \geqslant (\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_3} + \sqrt{a_2} \cdot \sqrt{a_4})^2$.

Tad $(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) \geqslant (\sqrt{a_1a_3} + \sqrt{a_2a_4})^2 = \left(\sqrt{2017} + \sqrt{2017}\right)^2 = \left(2\sqrt{2017}\right)^2 =$
$= 4 \cdot 2017 = 8068$.

Vienādība tiek sasniegta, piemēram, ja $a_1 = a_2 = 2017$ un $a_3 = a_4 = 1$. Tātad izteiksmes $(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)$ mazākā iespējamā vērtība ir 8068. $\square$

AMO 2016./2017. 12.2.: "Pierādīt, ka $\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b} + \dfrac{16}{c} \geqslant \dfrac{49}{a+b+c}$, ja a, b, c ir pozitīvi skaitļi!" [2]

Atrisinājums: $\left(\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\dfrac{4}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\dfrac{16}{c}}\right)^2\right)\left((\sqrt{a})^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + (\sqrt{c})^2\right) \geqslant$
$\geqslant \left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}\sqrt{a} + \sqrt{\dfrac{4}{b}}\sqrt{b} + \sqrt{\dfrac{16}{c}}\sqrt{c}\right)^2$ pēc Koši nevienādības.

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{16}{c}\right)(a+b+c) \geqslant \left(\sqrt{\frac{1}{a} \cdot a} + \sqrt{\frac{4}{b} \cdot b} + \sqrt{\frac{16}{c} \cdot c}\right)^2 = (1+2+4)^2 = 7^2 = 49$$

Izdalot abas puses ar $a + b + c > 0$ izriet prasītais. $\square$

AMO 2017./2018. 11.1.: "Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām izpildās $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$." [3]

Atrisinājums: Vienādojuma kreisā puse ir Faulhabera formulas specgadījums $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, bet labā puse ir specgadījums $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ kvadrātā.

Attiecīgi $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$. $\square$

2. pielikums

Uzdevums: Pierādīt vai atspēkot, ka jebkura trijstūra malu garumiem a, b, c ir spēkā nevienādība

$$\left(a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geqslant 9 \tag{10}$$

Atrisinājums: Nevienādība tiks pierādīta, nevis atspēkota.

Tā kā a, b, c – trijstūra malas, atļauts veikt Ravi substitūciju: $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, kur $x,y,z>0$. Pārrakstot (10), iegūst:

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geqslant\frac{9}{4} \tag{11}$$

Nezaudējot vispārīgumu, var pieņemt, ka $x\geqslant y\geqslant z$, un spriest, ka:

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\geqslant\frac{1}{4xy}+\frac{2}{(y+z)(z+x)} \tag{12}$$

(Šis izpildās, jo, veicot ekvivalentus pārveidojumus, nevienādība kļūst par $4xy(x+y)^2\geqslant(y+z)^2(z+x)^2$, kas izpildās pēc pieņēmuma, ka $x\geqslant y\geqslant z$.)

Tad (11) kļūst par

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{4xy}+\frac{2}{(y+z)(z+x)}\right)\geqslant\frac{9}{4} \tag{13}$$

un (13) pēc ekvivalentiem pārveidojumiem kļūst par $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2\geqslant 6xyz$, kas izpildās pēc sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. □

Piezīme: (11) ir 1996. gada Irānas matemātikas olimpiādes uzdevums. [13: p.25]